

Zur magneto-hydrostatischen
Theorie der Sonnenflecken

Willi Deinzer

=

1962

Zur magneto-hydrostatischen Theorie der Sonnenflecken

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Willi Deinzer aus Nürnberg

1963



Berichterstatter: Prof. Dr. A. Schlüter

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juli 1962

U N I - Druck, München 13, Amalienstraße 85

Zusammenfassung

Stationäre Sonnenflecken-Modelle werden berechnet, denen folgende Vorstellung zugrunde liegt: Das Sonnenflecken-Magnetfeld befindet sich im magneto-hydrostatischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung; die dazu erforderliche Horizontalkomponente des Druckgradienten soll zustande kommen durch Behinderung der Konvektion, dem im Bereich der sog. Wasserstoff-Konvektionszone wesentlichen Energietransport-Mechanismus, durch das Magnetfeld. Diese Behinderung wird, phänomenologisch im Rahmen der Prandtl'schen Mischungswegtheorie, beschrieben durch ein Verhältnis von Mischungsweg l zur Skalenhöhe des Druckes H mit $0 \leq l/H \leq (l/H)_{\text{WGE}}$. Demzufolge erhält man unter entsprechenden Randbedingungen eine ein-parametrische Schar von Modellen verschiedener eff. Temperaturen und verschiedener magnetischer Feldstärken.

Inhalt

	Seite
1. Einleitung	1
2. Differentialgleichungs-System	6
a) Magnetfeld	6
b) Schichtung	8
c) Wasserstoff-Konvektionszone und Magnetfeld	11
3. Randbedingungen und Gang der Rechnung	14
4. Ergebnisse	20
5. Schlußbemerkungen	26
Literatur	28
Abbildungen	29

1. Einleitung.

Sonnenflecken nennt man im Jahre 1611 von Christoph Scheiner S.J. entdeckte dunkle Stellen auf der Sonnenoberfläche. Mit zunehmend verfeinerter Beobachtungstechnik haben sich diese als ein äusserst vielgestaltiges astrophysikalisches Phänomen erwiesen; es seien nur ihre begrenzte Lebensdauer, die charakteristische Wanderung von höheren heliographischen Breiten in die Nähe des Sonnenäquators und die zahlenmässige Zunahme ihres Auftretens im Laufe eines 11-jährigen Zyklus, die mit ihnen verbundenen starken Magnetfelder und die Bewegungsverhältnisse der zu ihrem Bereich gehörenden Materie erwähnt. Die folgende Untersuchung befasst sich mit stationären Sonnenflecken und hat zum Ziel, eine quantitative Erklärung zu geben für das gemeinsame Auftreten von Gebieten mit - gegenüber ihrer Umgebung - reduzierter Energieabstrahlung ("Sonnenflecken") und starken Magnetfeldern. Die gesonderte Behandlung dieses zeitunabhängigen Teilproblems wird nahegelegt durch die relativ langsame zeitliche Veränderlichkeit des Phänomens und erweist sich angesichts der Vielfalt der mit den Sonnenflecken verbundenen physikalischen Vorgänge als zweckmässig.

Nach T.G. Cowling (1946) übertrifft die Zerfallszeit der Sonnenflecken - Magnetfelder alle anderen im Zusammenhang mit dem Phänomen auftretenden Zeitskalen erheblich, so dass man das Magnetfeld als primär vorhanden und die geringere Energieabstrahlung als Folge davon betrachten kann. Im weiteren sei daher die Existenz eines starken Magnetfeldes vorausgesetzt und versucht, den damit verbundenen thermodynamischen Zustand der Sonnenmaterie zu erklären.

Ein Magnetfeld übt auf ionisierte Materie (wie sie die Sonnenmaterie darstellt) über die darin fliessenden elektrischen Ströme Kräfte aus. Stationäre Verhältnisse existieren dann, wenn sich - nach den Gesetzen der Magneto-Hydrostatik - Druckgradient und Schwerkraft mit diesen magnetischen Kräften im Gleichgewicht befinden. Setzt man Rotationssymmetrie und Verwindungsfreiheit voraus, so lässt sich leicht überblicken, dass ein Magnetfeld auf seine Umgebung Kräfte parallel und senkrecht zur Symmetrieachse ausübt. Nimmt man diese Voraussetzungen für Sonnenflecken-Magnetfelder an, so hat man also Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung zu erwarten (Symmetrieachse des Feldes in Richtung des Sonnenradius). Bei Gleichgewicht muss daher der Druckgradient eine horizontale Komponente besitzen; d.h. der Druck im Bereich des Magnetfeldes muss ausser von der Tiefe auch vom Abstand von der Symmetrieachse abhängen. Der Verlauf von Druck und Temperatur mit der Tiefe, die sog. Schichtung, wird wesentlich bestimmt durch den Mechanismus, der die im Inneren der Sonne erzeugte Energie an die Oberfläche transportiert. Bei Gleichgewicht muss dieser Energietransport-Mechanismus vom Magnetfeld so beeinflusst werden, dass der resultierende Druckgradient zusammen mit der Schwerkraft die magnetischen Kräfte kompensiert.

Dadurch werden Magneto-Hydrostatik, die den Zusammenhang zwischen Druckgradient und Magnetfeld beschreibt, und die Gesetze, die die Schichtung und den Einfluss des Magnetfeldes auf diese bestimmen, miteinander verknüpft. Die Formulierung des magneto-hydrostatischen Gleichgewichtes, im allgemeinen eine partielle Vektor-Differentialgleichung, lässt sich nach A. Schlüter und St. Temesváry (1958) vereinfachen. Es gelingt aufgrund geeigneter Annahmen, die Integration in horizontaler Richtung auszuführen; dadurch wird es möglich, die Betrachtungen auf die Symmetrieachse zu beschränken und das Magnetfeld dort aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu errechnen.

Der Energietransport erfolgt im Bereich zwischen Sonnenoberfläche und einer Tiefe von ca. $1/10$ Sonnenradius - im Bereich der sog. Wasserstoff-Konvektionszone (WKZ) - fast vollständig durch turbulente Konvektion. Da eine deduktive Beschreibung dieses Zustandes, ausgehend von den Gesetzen der Hydrodynamik, noch nicht so weit entwickelt ist, dass man sie hier mit Erfolg anwenden könnte, erfolgt die Beschreibung der WKZ wie bisher im Rahmen der Prandtl'schen Mischungswegtheorie: Ein "Turbulenzelement" bildet sich, steigt auf und hat sich nach Durchlaufen der Prandtl'schen Mischungsweglänge l ganz mit seiner Umgebung vermischt und seinen Energieüberschuss an diese abgegeben. In der astrophysikalischen Anwendung wird im allgemeinen die Mischungsweglänge l proportional der Skalenhöhe des Druckes H , im folgenden homogene Schichtdicke genannt, gesetzt und für den Proportionalitätsfaktor ein Wert zwischen 1 und 2 angenommen. Diese Theorie ist rein phänomenologisch, d.h. die Formulierung ist so gewählt, dass sie eine physikalisch vernünftige Beschreibung der WKZ liefert.

Bei der Bestimmung der Schichtung im Bereich des Magnetfeldes handelt es sich nun darum, den Einfluss des Magnetfeldes auf die turbulente Konvektion zu untersuchen. Eine deduktive Beschreibung ist auch für diesen Fall noch nicht hinreichend erprobt, so dass es nahe liegt, hier ebenfalls eine phänomenologische Theorie zu versuchen. Hierzu ist es von Nutzen, den Einfluss des Verhältnisses von Mischungsweg l zu homogener Schichtdicke H auf die Schichtung der WKZ genauer zu verfolgen. Dieses Verhältnis regelt die Effektivität des konvektiven Energietransportes: Ist es Null, so ist die Konvektion in Bezug auf den Energietransport völlig ineffektiv; die Energie wird vollkommen durch Strahlung transportiert und Druck-, bzw. Temperaturverlauf sind entsprechend. Mit wachsendem Verhältnis wächst der Anteil der Konvektion am Energietransport bis er beim Wert $l/H = (l/H)_{WKZ}$ den üblichen Vorstellungen entspricht und man die gewohnte WKZ-Schichtung erhält.

Ähnlich hat man sich - qualitativ - den Einfluss des Magnetfeldes auf die turbulente Konvektion vorzustellen: Je stärker das Magnetfeld ist, umso stärker wird es die mit der Konvektion verbundene Bewegung der Materie behindern und damit den Anteil der Konvektion am Energietransport beeinträchtigen, bis es im Grenzfall so stark ist, dass die Konvektion völlig unterdrückt und eine dem Energietransport durch Strahlung entsprechende Schichtung erzwungen wird.

Im Jahre 1941 wurde von L. Biermann vorgeschlagen, ausgehend von diesem Grenzfall der dem Energietransport durch Strahlung entsprechenden Schichtung im Bereich starker Magnetfelder, das Sonnenfleckephänomen zu erklären. Nachdem die quantitative Durchführung unter der Annahme vollständiger Unterdrückung der Konvektion durch die Magnetfelder zunächst zu Schwierigkeiten führte, wurde versucht, eine Behinderung der Konvektion in Rechnung zu setzen. Als ein Mass für diese Behinderung bietet sich nach den vorausgehenden Erörterungen das Verhältnis von Mischungsweg l zu homogener Schichtdicke H an. Im folgenden wird also der physikalische Mechanismus der Behinderung der Konvektion durch ein Magnetfeld mit Hilfe einer Zahl $0 \leq l/H \leq (l/H)_{\text{WKZ}}$ beschrieben.

Die durchgeführten Rechnungen zeigen, dass man mit dieser Formulierung Erfolg hat. Die theoretischen Sonnenfleck-Modelle, Lösungen des die Sonnenfleck beschreibenden Systems von Differentialgleichungen unter physikalisch sinnvollen Randbedingungen, sind realistisch: Das heisst, soweit sie sich mit den Beobachtungen vergleichen lassen (z.B. hinsichtlich der magnetischen Feldstärken) stimmen sie mit diesen in der Grössenordnung überein. Entsprechend der verschiedenstarken Behinderung der Konvektion durch verschieden grosse Magnetfelder, die sich im Gleichgewicht mit durch verschieden hohe eff. Flecktemperaturen gekennzeichneten Schichtungen befinden, erhält man eine Schar von Modellen. Daraus mag man entnehmen, dass das physikalische Bild für den Zusammenhang zwischen reduziertem Energiestrom und Magnetfeld im wesentlichen richtig ist. Daneben folgen aus der Diskussion der Schar von Sonnenfleck-Modellen Hinweise auf die Wirksamkeit der Behinderung der Konvektion durch ein Magnetfeld.

Bezeichnungen

$\mathbf{L}$	Vektor der magn. Feldstärke; seine Komponenten im System der Zylinderkoordinaten lauten B_r , B_φ , B_z ; B_0 Zentralfeldstärke im beobachtbaren Niveau.
c_1, c_2	Integrationskonstanten, siehe Gleichungen (22) und (23).
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck.
D	Hilfsgrösse, wird benötigt bei der Umformung und Zusammenfassung des zum konvektiven Temperaturgradienten führenden Gleichungssystems in Kap. 26.
D (α)	normierte Horizontalverteilung von B_z .
F	gesamter Energiestrom durch den Sonnenfleck; setzt sich zusammen aus Strahlungsenergiestrom F_R und konvektivem Energiestrom F_K .
f	magnetischer Fluss in spezieller Normierung, siehe Gleichung (5).
$\mathbf{g}$	Vektor der Schwerebeschleunigung; Richtung parallel zum Sonnenradius, Betrag g.
H	homogene Schichtdicke; siehe Gleichung (10).
k	Boltzmannkonstante.
l	Prandtl'scher Mischungsweg.
P (α)	Horizontalverteilung von B_z .
p	Gasdruck.
r	Abstand von der Symmetrieachse des Sonnenflecks.
$\bar{r}$	mittlerer Fleckradius, Definition siehe Gleichung (8).
R	Gaskonstante.
T	absolute Temperatur; T_{eff} effektive Temperatur.
U	Hilfsgrösse, siehe D.
V	Hilfsgrösse, siehe D.
$\bar{v}$	mittlere Geschwindigkeit der "Turbulenzelemente".
W	Hilfsgrösse, siehe D.
X	Massenanteil des Wasserstoffs.

- x Ionisationsgrad des Wasserstoffs.
- y Magnetfeldgrösse, definiert im Zusammenhang mit Gleichung (5).
- z Tiefe, nach unten positiv gezählt; spezielle Tiefen: z_D Tiefe des oberen Randes (sog. geom. Depression) und z_0 Tiefe des unteren Randes.
- α Hilfsgrössen bei der Beschreibung des Magnetfeldes mit Hilfe
- ξ der Ähnlichkeitsannahme (2).
- κ Absorptionskoeffizient.
- μ Molekulargewicht; μ_0 Wert beim Ionisationsgrad $x = 0$.
- ρ Dichte.
- σ Strahlungskonstante im Stefan-Boltzmann-Gesetz.
- τ optische Tiefe.
- ϕ magnetischer Fluss.
- φ Winkel um die Symmetrieachse des Sonnenflecks (Azimut).
- χ Ionisationsenergie des Wasserstoffs.
- ∇ doppellogarithmischer Temperaturgradient $\frac{d \log T}{d \log p}$; spezielle Gradienten: ∇_{ad} adiabatischer, ∇_R Strahlungsgradient; ∇' Gradient, der die Zustandsänderung der aufsteigenden "Turbulenzelemente" beschreibt.

2. Differentialgleichungen

Die eingangs geschilderten qualitativen Vorstellungen sollen nun genauer untersucht werden; dazu ist es nötig, sie quantitativ zu formulieren. Den allgemeinen Rahmen für eine solche Formulierung bilden Impuls - und Energiebilanz, wie sie aus der Boltzmann'schen Stoßgleichung folgen. Durch Spezialisierung der einzelnen Glieder auf den vorliegenden Fall erhält man als Ausdruck für die Impulserhaltung die magneto-hydrostatische Gleichung - im folgenden zur Bestimmung des Magnetfeldes benutzt - und als Ausdruck für die Energieerhaltung die Schichtungsgleichungen. Diese Bemerkung soll indes nur dazu dienen, den allgemeinen physikalischen Hintergrund der vorliegenden Untersuchung zu skizzieren; der zu den speziellen Gleichungen führende Weg soll nicht verfolgt werden, sondern diese werden in ihrer in der Literatur verbreiteten Form direkt angegeben.

a) Magnetfeld:

Die hier anzugebende Differentialgleichung findet sich samt Herleitung in der Arbeit von A. Schlüter und St. Temesváry (1958). Ihr Zustandekommen wird hier kurz wiederholt; einige in diesen Zusammenhang gehörende Dinge werden diskutiert. Bezüglich Einzelheiten sei auf die Originalarbeit verwiesen.

Das Gleichgewicht zwischen magnetischen und Druckkräften wird beschrieben durch die magneto-hydrostatische Gleichung

$$\text{grad } p = -\frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{B}] + \rho \mathbf{g}. \quad (1)$$

Als geeignetes Koordinatensystem zur Bearbeitung dieser Gleichung ist das System der Zylinderkoordinaten gewählt: r Abstand von der Symmetrieachse, z Tiefe (nach unten positiv gezählt) und φ Winkel um die Achse. Zur Vereinfachung des von der Lorentzkraft herrührenden Gliedes werden folgende Annahmen gemacht: Das Magnetfeld sei meridional ($B_\varphi = 0$) und rotationssymmetrisch (unabhängig von φ). Die zweite Annahme bewirkt, daß im gewählten Koordinatensystem eine der drei Gleichungen (1) identisch erfüllt ist. Eine außerordentliche Vereinfachung bringt die weitere Annahme, der magnetische Fluß sei ähnlich in allen Tiefen - mathematisch ausgedrückt

$$B_z(z, r) = B_z(z, 0) \cdot P(\alpha), \quad \text{mit} \quad \alpha(z, r) = r \cdot \xi(z). \quad (2)$$

Diese Annahme ist nur sinnvoll, wenn man sie auf ein Magnetfeld anwendet, in dem keine rücklaufenden Feldlinien auftreten, in dem also der gesamte magnetische Fluß Φ endlich ist. Daß Sonnenflecken-Magnetfelder diese zusätzliche Forderung erfüllen folgt, aus den Beobachtungen von G.E. Hale und S.B. Nicholson (1925), nach denen jeweils zwei Sonnenflecken entgegengesetzter magnetischer Polarität zusammengehören. Die Funktion $P(\alpha)$ beschreibt die horizontale Abhängigkeit der Vertikalkomponente B_z des Magnetfeldes. Der zusätzlichen Forderung zufolge muß diese immer positiv sein, gegen unendlich hinreichend stark abnehmen und - konsistent mit (2) - an der Stelle $\alpha = 0$ den Wert 1 annehmen.

Es ist nun möglich, die Komponenten des Magnetfeldes durch $P(\alpha)$ und $\xi(z)$ auszudrücken. Aus der Konstanz des magnetischen Flusses zusammen mit (2) folgt für die Vertikalkomponente

$$B_z(z, r) = D(\alpha) \cdot \xi(z); \quad (3)$$

die Funktion $D(\alpha)$ geht aus $P(\alpha)$ durch geeignete Normierung hervor

$$D(\alpha) = \frac{\phi}{2\pi \int_0^\infty P(\alpha) \alpha d\alpha} P(\alpha).$$

Weiter erhält man aus der durch die Maxwell'schen Gleichungen geforderten Divergenzfreiheit des Magnetfeldes $\text{div } \mathbf{B} = 0$ zusammen mit (3) für die Horizontalkomponente

$$B_r(z, r) = -D(\alpha) \alpha \frac{d\xi}{dz}. \quad (4)$$

Die Ausdrücke (3) und (4) werden in die r -Komponente der Gleichung (1) eingesetzt; man erhält eine Gleichung, die sich über α integrieren lässt. Nach Umordnung ergibt sich

$$f y y'' - y^4 + 8\pi \Delta p = 0. \quad (5)$$

Darin bedeuten Striche Ableitungen nach der Tiefe z und es sind

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{B_z(z, 0)}, & \Delta p &= p(z, \infty) - p(z, 0) \\ f &= \frac{\phi}{\pi} \frac{\int_0^\infty P^2(\alpha) \alpha d\alpha}{\int_0^\infty P(\alpha) \alpha d\alpha}, & &= p_{\text{Wuk}}(z) - p_{\text{Fleck}}(z). \end{aligned}$$

Diese ausserordentlich einfache Gleichung lässt sich interpretieren als Gleichgewicht zwischen magnetischem Druck $\frac{y^4}{8\pi}$, magnetischen Spannungen $-\frac{f y y''}{8\pi}$ und horizontaler Druckdifferenz Δp . Die durch die Ähnlichkeitsannahme möglich gewordene Integration über die horizontale Abhängigkeit der Grössen gestattet, wie ersichtlich, eine partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche zurückzuführen und bietet zugleich den Vorteil, alle Betrachtungen auf die Symmetrieachse beschränken zu können.

Angewandt auf die z -Komponente von Gleichung (1) ergibt dies, da die Lorentzkraft auf der Fleckachse verschwindet,

$$p' = g \cdot \rho. \quad (6)$$

Das vertikale magneto-hydrostatische Gleichgewicht reduziert sich also auf das hydrostatische Gleichgewicht. Die Gleichung gehört daher bereits zum zweiten Teil des Systems.

Wie bei A. Schlüter und St. Temesváry (1958) gezeigt ist, lautet die Gleichung der Feldlinien

$$\alpha(z, r) = \alpha = \text{const.}$$

woraus sich nach (2) ergibt

$$r = \frac{\alpha}{\xi(z)}$$

Die darin auftretende Funktion $\xi(z)$ kann man mit Hilfe von (3) durch B_z und $D(\alpha)$ ausdrücken und zwar, für später zweckmässig, in der Form für $r = 0$.
Erinnert man sich noch der Normierung, die $P(\alpha)$ mit $D(\alpha)$ verbindet, so erhält man als Gleichung der Feldlinien

$$r = \sqrt{\frac{\phi}{\pi} \frac{1}{B_z(z, r)}} \sqrt{2 \int_0^\alpha P(\alpha) \alpha d\alpha} \quad (7)$$

Diese Form ist so geschrieben, dass man sie in Verbindung bringen kann mit der Definition des mittleren Fleckradius $\bar{r}$

$$\pi \bar{r}^2 \cdot B_z(z, 0) = \phi \quad \bar{r} = \sqrt{\frac{\phi}{\pi} \frac{1}{B_z(z, 0)}} \quad (8)$$

Der so definierte mittlere Fleckradius ist daher die Feldlinie, gekennzeichnet durch

$$\alpha = \sqrt{2 \int_0^{\alpha} P(\alpha) \alpha d\alpha}$$

Für die weitere Rechnung muss nun noch die Funktion $P(\alpha)$ gewählt werden; es gelte

$$P(\alpha) = e^{-\alpha^2} \quad (9)$$

Diese Form ist in guter Übereinstimmung mit der an der Sonnenoberfläche beobachteten Verteilung des magnetischen Flusses (siehe z.B. C. de Jager (1959), Abb. 33), besitzt die geforderten Eigenschaften und die in den verschiedenen Ausdrücken stehenden Integrale, unter denen sie steht, lassen sich ausführen. Man erhält dann

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \frac{\phi}{\pi} \cdot e^{-\alpha^2}, \\ f &= \frac{\phi}{\pi} \cdot \frac{1}{2}, \\ \bar{r} &= \alpha \sqrt{\frac{\phi}{\pi}} \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7')$$

Mittlerer Fleckradius $\bar{r}$ ist also - gemäss Definition (6) - die zu $\alpha = 1$ gehörende Feldlinie, bzw. er liegt dort, wo die Vertikalkomponente B_z 1/e des Wertes der Zentralfeldstärke annimmt.

b) Schichtung:

Die Schichtung der Sonne im hier interessierenden Bereich zwischen Oberfläche und einer Tiefe von ca. 1/10 Sonnenradius wird bestimmt durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung. Für die numerische Durchführung besonders zweckmässig sind die Gleichungen in einer Form mit z und $\log T$ als abhängigen Variablen und $\log p$ als unabhängiger Variabler.

Für die Tiefe z folgt aus (6) die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{d \log p} = \ln 10 \cdot \frac{2T}{\mu g} = \ln 10 \cdot H. \quad (10)$$

Erfolgt der Energietransport durch Strahlung, so ergibt sich für $\log T$ die Differentialgleichung

$$\frac{d \log T}{d \log p} = \nabla_R = \frac{3}{16} \frac{\kappa \cdot g \cdot H}{\sigma T^4} F. \quad (11)$$

Übersteigt der hieraus folgende Temperaturgradient den adiabatischen Gradienten

$$\nabla_{ad} = \frac{1 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{x}{12T} \right)}{5 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{x}{12T} \right)^2}, \quad (12)$$

so wird die Schichtung thermisch instabil. Ihre Beschreibung ist im Falle der dann einsetzenden turbulenten Konvektion mit der eingangs geschilderten Problematik behaftet. Im Rahmen der Prandtl'schen Mischungswegtheorie wurde ein Formalismus zur Berechnung des Temperaturgradienten entwickelt, dessen allgemein verbreitete Form sich bei E. Böhm-Vitense (1958) findet. Der gesamte Energiestrom setzt sich zusammen aus einem (wesentlichen) Anteil F_K , der durch Konvektion transportiert wird und einem (im allgemeinen um Zehnerpotenzen kleineren) Anteil F_R , der durch Strahlung transportiert wird, also

$$F = F_K + F_R. \quad (13)$$

Die beiden Anteile sind mit dem Temperaturgradienten ∇ und dem die Temperaturänderung der aufsteigenden "Turbulenzelemente" bestimmenden Gradienten ∇' verknüpft durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_R &= \frac{16}{3} \cdot \frac{\sigma T^4}{\kappa_{RH}} \nabla, \\ F_K &= \frac{1}{2} c_p \varrho \bar{v} \frac{L}{H} (\nabla - \nabla'). \end{aligned} \quad (14)$$

Die Geschwindigkeit $\bar{v}$ der aufsteigenden "Turbulenzelemente" stellt sich im Gleichgewicht zwischen Auftriebskraft und Newton'scher Widerstandskraft ein und beträgt

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{8} \frac{2\sigma T}{\mu} \left(\frac{L}{H} \right)^2 (\nabla - \nabla'). \quad (15)$$

Würden die "Turbulenzelemente" während ihrer Lebensdauer nicht im Energieaustausch mit ihrer Umgebung stehen, so verlief ihre Zustandsänderung adiabatisch; strahlen sie Energie an ihre Umgebung ab, so ergibt sich ihre Temperaturänderung nach E. Böhm-Vitense (1958) aus

$$\frac{\nabla - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} = \frac{1}{24} \frac{c_p \sigma^2 T \kappa_H \bar{v}}{\sigma T^4} \left(\frac{L}{H} \right). \quad (16)$$

Diese Gleichungen gestatten, den Temperaturgradienten ∇ im Falle thermischer Instabilität zu berechnen; wegen Fragen bezüglich des genaueren physikalischen Hintergrundes und der Herleitung sei auch hier auf die Originalarbeit verwiesen (dort auch Angabe der gesamten hierzu gehörenden Literatur). Für die weitere Rechnung ist es bequem, die Gleichungen geeignet zusammenzufassen. Mit R. Kippenhahn (1960) geschieht das wie folgt: Aus (15) und (16) erhält man eine Gleichung, die $\nabla - \nabla'$ mit dem sog. Überschussgradienten $\nabla - \nabla_{ad}$ verknüpft

$$\begin{aligned} (\nabla - \nabla') + 2u(\nabla - \nabla')^{1/2} - (\nabla - \nabla_{ad}) &= 0, \\ u &= 12 \frac{\sigma T^4}{c_p \varrho^2 T \kappa_H} \left(\frac{H}{L} \right)^2 \left(\frac{8\mu}{2T} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Aus den Gleichungen (11), (13), (14) und (15) gewinnt man eine Gleichung für $\nabla - \nabla'$, die sich mit Hilfe der positiven Wurzel von (17) in die folgende Gleichung für $\nabla - \nabla_{ad}$ umformen lässt:

$$\begin{aligned} (\nabla - \nabla_{ad}) - (\nabla_R - \nabla_{ad}) + \sqrt{[u^2 + (\nabla - \nabla_{ad}) - u]^2} &= 0, \\ \nabla &= \frac{1}{2} \frac{1}{u} \approx \frac{1}{u}. \end{aligned} \quad (18)$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades für die Grösse $\sqrt{u^2 - (\nabla - \nabla_{ad})}$. Ihre Lösung führt auf den sog. "casus reducibilis", lässt sich also durch die Cardanischen Formeln darstellen; aus der einzigen reellen Wurzel ergibt sich

$$\frac{d \log \eta}{d \log p} = \nabla = \nabla_{ad} + \frac{1}{W^2} (W^2 - \frac{7}{9} u^2 + \frac{2}{3} W u)^2 - u^2, \quad (19)$$

mit

$$W = \sqrt[3]{\frac{u^2}{4} (\nabla_R - \nabla_{ad} + \frac{16}{27} u^2)^2 + \frac{1}{27} u^2},$$

$$J = \frac{u^2}{4} (\nabla_R - \nabla_{ad} + \frac{16}{27} u^2)^2 + (\frac{5}{9} u^2)^3.$$

Die rechten Seiten der Differentialgleichungen (10) und (11), bzw. (19) sind Funktionen allein von Druck und Temperatur. Um sie als solche berechnen zu können, muss die funktionale Abhängigkeit für einige dort stehende Grössen noch angegeben werden.

Die Werte des Rosseland-Mittels der Opazität in Abhängigkeit von Druck und Temperatur wurden der Arbeit von E. Vitense (1951a) entnommen. Wie bei N. Baker und R. Kippenhahn (1962) wurde der jeweils benötigte Wert durch Interpolation in einer zweidimensionalen Tabelle gewonnen.

Die folgenden Beziehungen für c_p , ξ , μ und x stammen aus der Arbeit von R. Kippenhahn, St. Temesváry and L. Biermann (1958). Der Ausdruck für die spezifische Wärme c_p lautet:

$$c_p = \frac{R}{\mu} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} x (1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{x}{\mu T} \right)^2 \right).$$

Die Abhängigkeit der Dichte ρ entnimmt man der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\rho = \frac{\mu p}{R T}.$$

Das Molekulargewicht bei teilweiser Ionisation des Wasserstoffs ergibt sich zu

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+x}.$$

Für den Ionisationsgrad x des Wasserstoffs - und nur Wasserstoff-Ionisation wird bei den folgenden Rechnungen berücksichtigt - findet sich in der genannten Arbeit, die aus der Saha-Gleichung folgende Form

$$\log \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{5}{2} \log \eta - \frac{13.53 \cdot 5040}{T} - 0.48 - \log x - \log p - \log \mu_0.$$

In diesen Gleichungen ist der Anteil des Strahlungsdruckes am Gesamtdruck nicht berücksichtigt; dieser ist im hier betrachteten Bereich der Sonne gegenüber dem Gasdruck vernachlässigbar. Ausserdem wird mit einem konstanten Betrag g der Gravitationsbeschleunigung gerechnet; da der wesentliche Teil der Sonnenmasse unterhalb der WKZ liegt, ist auch dies gerechtfertigt.

Damit verfügt man über einen Formalismus, der es gestattet, die Schichtung im interessierenden Bereich zu berechnen. Die WKZ-Schichtung wurde im allgemeinen für $1/H = 1$ ermittelt. Um festzustellen, wie empfindlich die Ergebnisse von $1/H$ abhängen, wurde die Rechnung in einem Fall auch für $1/H = 2$ durchgeführt.

c) Wasserstoff-Konvektionszone und Magnetfeld:

Der im vorigen Abschnitt zusammengestellte Formalismus soll sowohl dazu dienen, die WKZ-Schichtung zu berechnen; indem man dem behindernden Einfluss des Magnetfeldes auf die Konvektion durch Verkleinerung des Verhältnisses l/H Rechnung trägt, soll dieser auch die Ermittlung der Schichtung auf der Fleckachse ermöglichen. Bedingungen, die den Wert von l/H festlegen, werden im nächsten Kapitel genannt.

Dieser Weg, das Sonnenflecken-Problem zu bearbeiten, ist der eingangs erwähnten Verknüpfung zwischen Magneto-Hydrostatik und den die Schichtung bestimmenden Gesetzen gut angepasst:

Aus den Schichtungsgleichungen folgt ein Druckverlauf, der sich im betrachteten Bereich um einige Zehnerpotenzen ändert. Zur Berechnung des Magnetfeldes benötigt man die Differenz zwischen Druck in der WKZ und Druck auf der Fleckachse. Wie Proberechnungen gezeigt haben, darf diese Druckdifferenz nicht im gleichen Masse variieren wie die Drucke selbst, will man singularitätenfreie Lösungen der nicht-linearen Magnetfeldgleichung erhalten. Demzufolge muss die Schichtung auf der Fleckachse der WKZ-Schichtung immer eng benachbart sein. Genau das lässt sich mit der angegebenen Beschreibung erreichen, da sich bei ihr beide Schichtungen nur hinsichtlich des Wertes von l/H unterscheiden.

Beim Versuch, das Problem unter der Annahme zu bearbeiten, das Magnetfeld unterdrückt die Konvektion vollständig, stellte man sich vor, dass für eine günstige Anpassung der Schichtungen auf der Fleckachse und in der WKZ im allgemeinen seitliche Einstrahlung von Energie aus der heisseren Umgebung Sorge. Es stellte sich jedoch heraus, dass eine solche nur wirksam ist, wenn der mittlere Fleckradius um etwa eine Zehnerpotenz kleiner ist als die Beobachtungen ergeben. Rechnungen für Flecken mit den durchschnittlich beobachteten eff. Temperaturen ergaben daher keine realistischen Modelle (W. Deinzer, 1960).

Um den Zusammenhang der gewählten Formulierung mit dem Vorschlag von L. Biermann (1941) zu verdeutlichen, sei nun mit den Schichtungsgleichungen der Grenzübergang $l/H \rightarrow 0$ vorgenommen. Zu diesem Zweck muss man beachten, dass die in (17) angegebene Form für die Grösse U nur gilt, wenn der Energietransport durch optisch-dicke "Turbulenzelemente" erfolgt. Ihre für optisch-dünne "Turbulenzelemente" gültige Form (nach E. Vitense, 1953) lautet

$$U = 12 \frac{\sigma \pi^2 u H}{c_p \pi} \left(\frac{\delta \mu}{R \pi} \right)^{1/2},$$

bleibt also beim Grenzübergang von der Stelle an konstant, von der an man die "Turbulenzelemente" als optisch-dünn betrachten muss. Hingegen bleibt für die Grösse V der in (18) angegebene Zusammenhang mit den für optisch-dicke "Turbulenzelemente" gültigen U bestehen; V wird also in der Grenze zu Null. Somit lässt sich der Grenzübergang mit Gleichung (16) ausführen, und man erhält

$$\lim_{\gamma_H \rightarrow 0} \nabla = \nabla_R,$$

was auch aus physikalischen-Gründen zu erwarten war: man erhält in der Grenze die dem Energietransport durch Strahlung entsprechende Schichtung.

Es folgen nun noch zwei Bemerkungen, die die Annahme der Konstanz von l/H und von Gesamtenergiestrom F im hier betrachteten Tiefenbereich des Flecks betreffen.

Die Berücksichtigung einer Tiefenabhängigkeit des Verhältnisses l/H dürfte im Hinblick auf die Unsicherheit, die in der Beschreibung von Konvektion und ihrer Behinderung durch ein Magnetfeld im Rahmen der Prandtl'schen Mischungswegvorstellung enthalten ist, ohnedies unerheblich erscheinen. Numerischer Erfahrung zufolge lässt sich sogar überblicken, dass ein konstanter Wert l/H physikalisch vernünftig ist. Es mag plausibel erscheinen, dass der behindernde Einfluss des Magnetfeldes im Verhältnis von magnetischem zu Gasdruck $\frac{1}{2} \pi p$ erfolgt. Dieses Verhältnis ändert sich im oberen, nahe der Oberfläche gelegenen Bereich nicht wesentlich, da - wie die Rechnungen zeigen - Feldstärke und Gasdruck nach innen zunächst im gleichen Mass zunehmen. In den tieferen Bereichen, in denen die Änderung des Gasdruckes die des magnetischen Druckes überwiegt, verläuft die Schichtung nahezu adiabatisch. Dann ist der Temperaturgradient ∇ sehr unempfindlich gegen eine Änderung von l/H , wie man sieht, wenn man die Differentialgleichung für $\log T$ betrachtet. Diese lässt sich im Falle fastadiabatischer Schichtung erheblich vereinfachen, da nahezu alle Energie durch Konvektion transportiert wird und da die Zustandsänderung der aufsteigenden "Turbulenzelemente" ebenfalls fast-adiabatisch erfolgt. Der Temperaturgradient ∇ ergibt sich dann aus

$$F = \frac{1}{2} c_p \rho T \left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)^{1/2} \left(\frac{l}{H} \right)^2 (\nabla - \nabla_{ad})^{3/2} \quad (20)$$

Diese Gleichung erhält man unter den angeführten Umständen aus (14b) und (15). Eine Änderung von l/H wirkt sich danach auf die Differenz $\nabla - \nabla_{ad}$ aus nach

$$\frac{\Delta(l/H)}{l/H} = - \frac{3}{4} \frac{\Delta(\nabla - \nabla_{ad})}{\nabla - \nabla_{ad}} \quad (21)$$

Wird diese Differenz hinreichend klein - sie unterschreitet rasch den Wert 10^{-2} und liegt in tieferen Bereichen bei 10^{-5} - so ist eine Änderung von l/H für sie unerheblich.

Wie verhält es sich nun mit dem durch den Fleckbereich fliessenden Energiestrom F^* ?

*) An dieser Stelle eine kurze Klarstellung der Terminologie:

Die Grösse F , Energiestrom genannt, hat die Dimension $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2}$, müsste also korrekt als Energiestromdichte bezeichnet werden. Ein Energiestrom wäre die über die Fläche integrierte Grösse F , in der Astrophysik Leuchtkraft genannt. Da eine solche Grösse im folgenden nicht vorkommt wurde die übliche Bezeichnungsweise beibehalten; insbesondere bedeutet also Gesamtenergiestrom die Summe aus konvektivem und Strahlungsanteil von F .

Auch diese Frage lässt sich exakt erst beantworten, wenn eine deduktive Beschreibung der Turbulenz im Magnetfeld existiert. Vorläufig muss man auch hier versuchen, mit einer Annahme zu arbeiten. Eine solche stellt der Vorschlag von F. Hoyle (1943) dar, die Konvektion folge den magnetischen Feldlinien. Für ein nach oben abnehmendes Magnetfeld ergibt sich damit, dass sich die durch einen gewissen Querschnitt fliessende Energie nach Aufwärtsbewegung über einen grösseren Querschnitt verteilt, d.h. dass der Energiestrom F nach oben abnimmt. Es erhebt sich damit die Frage, inwieweit ein dergestalt tiefenabhängiger Energiestrom die Berechnung der Schichtung beeinflusst.

Genau genommen unterliegt der "Verdünnung" der Energie durch Konvektion längs der Feldlinien nur der Anteil, der durch Konvektion transportiert wird. Es lässt sich überlegen, dass gleich nach Einsetzen der Konvektion diese praktisch den gesamten Energietransport übernimmt. Für den durch Konvektion transportierten Bruchteil des Gesamtenergiestromes gilt nämlich

$$\frac{F_K}{F} = 1 - \frac{\nabla}{\nabla_R}.$$

Diese Gleichung findet sich bei St. Temesváry (1959); man erhält sie aus (11), (13) und (14a). Die Konvektion setzt dort ein, wo infolge zunehmender Opazität der Strahlungsgradient ∇_R den adiabatischen Gradienten ∇_{ad} übersteigt. Nun erfolgt die Zunahme der Opazität im oberflächennahen Bereich sehr rasch; im gleichen Masse übersteigt ∇_R den Wert ∇ , so dass man in guter Näherung annehmen kann, gleich nach Einsetzen der Konvektion übernimmt diese den Energietransport völlig. Man darf also durchaus den gesamten Energiestrom F dem "Verdünnungseffekt" unterwerfen.

Ein früherer Versuch, das Sonnenfleckensproblem zu bearbeiten, bestand darin, den Unterschied zwischen Fleck- und WKZ-Schichtung auf den "Verdünnungseffekt", sozusagen auf die fokussierende Wirkung der magnetischen Feldlinien in Bezug auf den Energiestrom zurückzuführen. Dieser Versuch misslang, da der Einfluss eines tiefenabhängigen Gesamtenergiestromes zu gering war; man erhielt im wesentlichen die Schichtung, wie sie zu einer Sonne mit der eff. Temperatur der Flecken gehören würde. Dazu ergaben sich keine singularitätenfreien Magnetfelder. Erst eine Änderung von l/H brachte den entscheidenden Fortschritt.

Dieses Verhalten ist wie folgt zu verstehen: Durch Erniedrigung des Energiestromes (entsprechend den eff. Fleckentemperaturen) erhält man Schichtungen, die sich von der Umgebung zu sehr unterscheiden; der Temperaturgradient bleibt zu flach, der Druckanstieg erfolgt daher zu steil. Auch eine Zunahme des Energiestromes mit der Tiefe ändert daran nichts. Den Grund dafür entnimmt man der Gleichung

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{3}{2} \frac{\Delta(\nabla - \nabla_{ad})}{\nabla - \nabla_{ad}},$$

die aus (20) ähnlich folgt wie (21): Eine Änderung von F wirkt sich nur im nicht-adiabatischen, also in einem räumlich relativ eng begrenzten Bereich der Schichtung aus. Die in Betracht gezogene Änderung von F über diesen Bereich bleibt offenbar zu gering, als dass sie eine günstigere Anpassung bewirken könnte. Steilere Temperaturgradienten und damit flacheren Druckanstieg bekommt man erst, wenn man durch Verkleinerung des Verhältnisses l/H die Konvektion ineffektiver macht. Diese ist - wie aus (21) ersichtlich - gerade dort von Einfluss, wo sich der zu kleine Energiestrom besonders auswirkt.

Damit steht dem reduzierten Energiestrom die über den gesamten Bereich konstante Grösse l/H gegenüber. Es mag daher erlaubt sein die Tiefenabhängigkeit von F , als einen Effekt höherer Ordnung, hier zu vernachlässigen. Durch den Fleckbereich fliesse ein konstanter Energiestrom, der mit der eff. Flecktemperatur durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz verknüpft ist, wie es auch der durch die ungestörte WKZ fliessende Energiestrom mit der eff. Temperatur der Photosphäre ist.

3. Randbedingungen und Gang der Rechnung.

Bevor man die Lösungen der im vorigen Kapitel formulierten Differentialgleichungen aufsuchen kann, müssen diese noch durch Angabe von Randbedingungen näher bestimmt werden. Dadurch wird nicht nur die Anzahl der Freiheitsgrade der Lösungsschar festgelegt, Art und Lage der Randbedingungen bestimmen auch ganz wesentlich das Schema des Rechnungsverlaufes. So erscheint es naheliegend, der Diskussion der Randbedingungen eine Darlegung des Rechnungsganges anzuschliessen.

Bei der folgenden Diskussion der Randbedingungen wird wegen der grosseren Anschaulichkeit durchweg die geometrische Tiefe z als Integrationsvariable betrachtet; die früher erwähnte Verwendung von $\log p$ als Integrationsvariabler ist nur für die numerische Durchführung wichtig. Wenn also im folgenden das Wort Rand gebraucht wird, so immer in der Bedeutung eines Intervallendes auf der geometrischen Tiefenskala.

Zunächst zum "oberen Rand":

Dieser soll jeweils im beobachtbaren Niveau liegen, also dort, wo im wesentlichen die Energieabstrahlung stattfindet; d.h. er liegt in der Schicht mit der optischen Tiefe $\tau = 2/3$. Die optische Tiefe ist - aus ihrer Definition ersichtlich - eine Funktion allein von Druck und Temperatur. Die Festlegung

$\tau = 2/3$ erfordert also das Bestehen eines funktionalen Zusammenhanges zwischen Druck und Temperatur in dieser Schicht. Dieser ergibt sich zahlenmässig durch Integration der hydrostatischen Gleichung $\frac{dp}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}$

wenn Temperaturverlauf und Absorptionseigenschaften in der darüberliegenden Atmosphäre bekannt sind: zu einer vorgegebenen Temperatur am oberen Rand, also zu einer vorgegebenen eff. Temperatur, erhält man dabei den zugehörigen Druck. Dieses Verfahren sollte auch für das Zentrum von Sonnenflecken richtige Werte liefern, da auf der Symmetrieachse des Magnetfeldes - wie bereits früher erwähnt - die Lorentzkraft verschwindet. Die skizzierte Rechnung wurde von E. Vitense (1951b) unter Verwendung theoretischer Temperaturschichtungen in der Atmosphäre und theoretischer Opazitäten durchgeführt. Die Ergebnisse - photosphärischer Druck in Abhängigkeit von eff. Temperatur und Gravitationsbeschleunigung - sind in Abb. 6 ihrer Arbeit zusammengestellt (siehe auch A. Unsöld (1955, Abb. 91). Diesen Diagramm wurden für die folgenden Rechnungen die zu gegebenen eff. Temperaturen gehörenden Drucke entnommen. Man kann auch empirische Druckwerte benutzen, stehen solche hinreichender Genauigkeit zur Verfügung. Es zeigt sich allerdings, dass eine Schwankung in den Druckwerten ausgeglichen wird durch eine Schwankung der sog. geometrischen Depression, von der gleich noch die Rede sein wird, ohne dass die weiteren Ergebnisse wesentlich beeinflusst werden.

Die Schichtungen wurden nun wie folgt festgelegt: Sämtliche für die Berechnung der WKZ benötigten Randbedingungen wurden am oberen Rand gestellt; d.h. im geometrischen Niveau $z = 0$ sollen die eff. Temperatur der Sonne und der sich aus dem erwähnten Diagramm dazu ergebende Druck von der Schichtung angenommen werden. Den Nullpunkt der geometrischen Tiefenskala darf man - willkürlich - in die Photosphäre legen, da die optische Tiefe nicht von z abhängt. Damit ist der Nullpunkt für alle weiteren Betrachtungen festgelegt.

Wollte man bei der Festlegung der Fleck-Schichtung in gleicher Weise verfahren, so müsste man wieder ein Zahlentripel z, T, p vorgeben. Werte für Druck und Temperatur anzugeben wäre nicht problematisch, welchen Wert aber soll z annehmen? Würde man sich allein für die Fleck-Schichtung interessieren, so könnte man auch hier $z = 0$ setzen. In der weiteren Untersuchung soll aber gerade aus dem Unterschied im Druckverlauf zwischen Fleck und Umgebung, genauer aus horizontalen Druckdifferenzen das Sonnenflecken-Magnetfeld berechnet werden. Daher ist es nötig, die geometrischen Tiefenskalen beider Schichtungen aufeinander zu beziehen: Der Randwert z müsste also gleich der Nullpunktdifferenz der Tiefenskalen, der sog. geometrischen Depression z_D sein. Diese beeinflusst die Lösungen ganz wesentlich, geht auch qualitativ aus den Beobachtungen hervor, lässt sich aber zahlenmässig nur ausserordentlich ungenau bestimmen. Die an die Fleckschichtung zu stellenden Randbedingungen wurden daher für den unteren Rand vorgegeben. Die Werte im beobachtbaren Niveau erhält man also als Werte der Lösungen an der

Stelle, an der zwischen Druck und Temperatur die Beziehung $\tau(p, T) = 2/3$ besteht. Für einen bestimmten Wert $1/H$ ergeben sich damit bestimmte Werte z_D , T_{eff} , p am oberen Rand; d.h. zwischen jeder dieser Größen und $1/H$ besteht also ein eindeutiger Zusammenhang. Da man an der gesamten, zu $0 \leq 1/H \leq (1/H)_{WKZ}$ gehörenden Lösungsschar interessiert ist, wäre es durchaus korrekt, einen Wert für $1/H$ vorzugeben und damit die Rechnung durchzuführen. Zweckmäßiger für die numerische Durchführung ist es allerdings, statt dessen T_{eff} - und damit p - vorzugeben und $1/H$ und die geometrische Depression z_D durch Rechnung zu ermitteln.

Die obere, an das Magnetfeld zu stellende Randbedingung gewinnt man aus der Forderung, dass es und seine Ableitung im Unendlichen verschwinden sollen. Hierfür zunächst eine notwendige Bedingung: Man kann in guter Näherung die horizontalen Druckdifferenzen oberhalb des beobachtbaren Niveaus gleich Null setzen; Gleichung (5) lautet dann

$$f y y'' - y^4 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich einmal integrieren und man erhält

$$\frac{1}{2} f y'^2 - \frac{1}{4} y^4 = c_1.$$

Wenn y und y' an einer Stelle, nämlich im Unendlichen, verschwinden sollen, dann muss die Integrationskonstante c_1 verschwinden, bzw. es muss gelten

$$f y'^2 = \frac{1}{2} y^4. \quad (22)$$

Dass diese Beziehung zugleich hinreichend für das oben geforderte Unendlichkeitsverhalten des Magnetfeldes ist, ergibt sich aus weiterer Integration; man erhält als Lösung der Differentialgleichung (22)

$$y = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2} f} \cdot \frac{1}{z} + c_2 \right). \quad (23)$$

Wenn $c_1 = 0$, bzw. Gleichung (22) erfüllt ist, sind also nur Lösungen $y(z)$ möglich, die samt ihren Ableitungen im Unendlichen gegen Null streben. Aus der Form (23) der Lösungen ersieht man auch den Grund dafür, dass sich eine Schar von Bedingungen, die das Magnetfeld im Unendlichen erfüllen soll durch eine einzige Randbedingung ersetzen lässt: Die Schar von Lösungen besitzt eine gemeinsame Asymptote - $y \rightarrow 0$ - welche die geforderten Eigenschaften besitzt. Das doppelte Vorzeichen der Lösungsschar (23) ist ohne Belang, da das interessierende Magnetfeld gleich y^2 ist.

Bevor nun die unteren Randbedingungen angegeben werden, noch eine Bemerkung zu ihrer Problematik. Neben dem bereits bei den Randbedingungen für die Schichtung diskutierten Grund ist es vor allem folgende Tatsache, die Bedingungen am unteren Rand erforderlich macht: Wegen der Nicht-Linearität des Differentialgleichungs-Systems sind die Singularitäten nicht einfach überschaubar. Um bei der numerischen Bearbeitung Lösungen zu vermeiden, die im betrachteten Integrationsintervall singular werden (was sehr leicht möglich ist, wie die Erfahrung zeigt), ist es nötig, sie durch Bedingungen an beiden Intervallenden festzulegen. Dieser einleuchtenden Notwendigkeit unterer Randbedingungen steht die Schwierigkeit

gegenüber, dort definierte Aussagen machen zu müssen, worüber noch keine definierten physikalischen Vorstellungen herrschen. Es mag daher ein vernünftiger Kompromiss sein, sich bei der Formulierung dieser Bedingungen von einer Vorstellung leiten zu lassen, die einer nicht zu detailliert festgelegten Physik entspringt, die aber trotzdem das Auftreten singulärer Lösungen hinreichend einschränkt. Eine Vorstellung der erwähnten Art ist, das Magnetfeld möge am unteren Rand stetig in ein homogenes Magnetfeld übergehen. Mehr als eine Aussage über das Verhalten des Magnetfeldes im Inneren zu liefern, soll diese Forderung dazu dienen, den Gültigkeitsbereich des der vorliegenden Theorie zugrundeliegenden physikalischen Bildes abzugrenzen gegen einen Bereich, in dem Vorstellungen über das Zustandekommen der Magnetfelder wesentlich werden dürften.

Ein homogenes, d.h. ein von der Tiefe unabhängiges Magnetfeld $y = \text{const.}$ erfordert nach Gleichung (5) von der Tiefe unabhängige Druckdifferenzen $\Delta p = \text{const.}$ Zwei Randbedingungen lauten also

$$y' = 0, \quad (24)$$

$$(\Delta p)' = 0; \quad (25)$$

eine dritte steckt in der Verknüpfung der konstanten Werte y und Δp . Sie folgt aus (5) zu

$$y'' = 8\pi \Delta p. \quad (26)$$

Wie man sieht, bedeutet die Forderung eines homogenen Magnetfeldes wegen $\Delta p = \text{const.}$ eine Vorwegnahme der Ergebnisse, die erst die Integration der Schichtungsgleichungen liefern kann. Sie ist nur dann gerechtfertigt, wenn man sie in einer Tiefe $z = z_0$ stellt, von der an $\Delta p = \text{const.}$ tatsächlich eine Lösung der Schichtungsgleichungen ist. In diesem Fall sind die Lösungen von z_0 nicht mehr abhängig. Berechnet man daher die verschiedenem z_0 entsprechende Schar von Lösungen, so kann man am Verhalten, das diese mit zunehmendem z_0 zeigen, sehen, ob und wann die unteren Randbedingungen zu Recht gestellt werden. In der Tat konvergieren die Lösungen mit zunehmendem z_0 . Damit ist die Frage nach der Lage des unteren Randes geklärt.

Es bleibt noch, die Bedingung (25) umzuformen. Diese ist laut hydrostatischer Gleichung äquivalent mit $\Delta \varrho = 0$; damit folgt aus der Zustandsgleichung (Ionisationsgrad $x = 1$ und damit konstantes Molekulargewicht μ in diesen Bereichen vorausgesetzt)

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} \quad (27)$$

Mit den an die Schichtung zu stellenden unteren Randbedingungen (26) und (27) ist nun auch die Beziehung der Tiefenskalen von Fleck- und WKZ-Schichten aufeinander hergestellt; formal kommt das darin zum Ausdruck, dass diese sich auf horizontale Druck- und Temperaturdifferenzen Δp und ΔT beziehen.

Der Übersichtlichkeit halber seien die Randbedingungen, denen die Sonnenfleck-Modelle genügen müssen, hier zusammen gestellt:

	Schichtung	Magnetfeld
oben	p T	$y' = \frac{y^L}{\sqrt{1f}}$
unten	$\Delta p = \frac{y^4}{f^2}$ $\Delta T = \frac{T}{p} \cdot \Delta p$	$y' = 0$
$z = z_0$		

Es sei noch erwähnt, dass die Lage des oberen Randes erst durch die Rechnung ermittelt wird; die Forderung, die Fleckschichtung soll am oberen Rand vorgegebene Werte von Druck und Temperatur annehmen, stellt also nur eine einzige Bedingung dar.

Zählt man nun die Freiheitsgrade des Systems der Differentialgleichungen ab und vergleicht sie mit der Anzahl der Randbedingungen, so ergibt sich, dass man eine drei-parametrische Schar von Lösungen zu erwarten hat. Die drei Scharparameter sind die Tiefe z_0 , der magnetische Fluss ϕ und die eff. Temperatur T_{eff} des Flecks. Dem Schema der Randbedingungen entnimmt man, dass die thermodynamischen Eigenschaften des Flecks - charakterisiert durch die eff. Temperatur - vorgegeben werden; die magnetischen Eigenschaften sind bestimmt und ergeben sich aus den Rechnungen.

Die Verteilung der Randbedingungen gewinnt an Anschaulichkeit, wenn nun der Gang der Rechnung dargestellt wird. Die Integration des Systems von Differentialgleichungen wurde nach dem Verfahren von Adams und Störmer durchgeführt; lag die Differenz zwischen interpoliertem und extrapoliertem Wert über einer oberen Fehlerschranke, dann wurde die Schrittweite solange halbiert, bis diese Differenz unter dieser Schranke lag. Alle Rechnungen wurden auf der elektronischen Rechenmaschine G 3 des Max-Planck-Institutes für Physik und Astrophysik ausgeführt.

Vor der eigentlichen Sonnenfleck-Modellrechnung wurden Druck- und Temperaturverlauf in der WKZ berechnet. Mit der Bedingung, diese Schichtung soll im geometrischen Niveau $z = 0$ die empirischen photosphärischen Druck- und Temperaturwerte annehmen ist der Nullpunkt der geometrischen Tiefenskala festgelegt und die Integration der Schichtungsgleichungen bestimmt.

Das Sonnenfleck-Modell ist eindeutig bestimmt durch die drei Größen

$$z_0, \phi, T_{\text{eff}}$$

Die Werte dieser drei Parameter wurden vorgegeben. Zudem wurde für die Druckdifferenz am unteren Rand $\Delta p(z_0)$ ein Wert angenommen; damit ist es möglich, aus (27) den Wert ΔT zu berechnen. Die WKZ-Schichtung ist bekannt, also sind mit Δp und ΔT auch die Werte von Druck und Temperatur am unteren Rand gegeben

und die Integration der Schichtung kann ausgeführt werden. Um nun die obere Randbedingung - im gleichen geometrischen Niveau sollen bestimmte Druck- und Temperaturwerte angenommen werden - zu erfüllen, wurde das Verhältnis von Mischungsweg l zu homogener Schichtdicke H verändert. Hier lässt sich mit Vorteil ein Verfahren verwenden, das l/H iterativ solange ändert, bis die obere Randbedingung erfüllt war. In der so erhaltenen Lösung liegt nun der obere Rand (die sog. geometrische Depression) fest.

Nun ist es möglich, horizontale Druckdifferenzen $\Delta p(z)$ zu bilden und damit die Magnetfeldgleichung zu integrieren. Da an beiden Rändern Forderungen an y' gestellt sind, ist es gleich an welchem Rand man beginnt. Es wurde oben begonnen und durch Variation des dortigen Wertes von y die Bedingung am unteren Rand erfüllt; auch hier bot ein Iterationsverfahren Vorteile.

Die so erhaltene Lösung gestattet nun nachzuprüfen, inwieweit Gleichung (26) zwischen dem eingangs angenommenen Wert $\Delta p(z_0)$ und dem nun erhaltenen $y(z_0)$ erfüllt ist. Dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein; man wird daher dieser Gleichung eine neue Druckdifferenz $\Delta p(z_0)$ entnehmen und das geschilderte Verfahren iterativ solange wiederholen bis (26) hinreichend gut erfüllt ist. Auch hier wurde ein abkürzendes Verfahren verwendet.

Diese getrennte Integration von Schichtung und Magnetfeld und ihre iterative Verknüpfung gestattet erst, grössere numerische Schwierigkeiten bei der Bearbeitung des Problems zu umgehen und dieses einer Lösung zugänglich zu machen.

4. Ergebnisse.

Unter den genannten Randbedingungen sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems, wie mehrfach erwähnt, eindeutig bestimmt, wenn man vorgibt

die Tiefe z_0 des unteren Randes,

den thermodynamischen Zustand des Flecks am oberen Rand, bei Verwendung

der Resultate von E. Vitense (1951b) allein gekennzeichnet durch die

eff. Flecktemperatur T_{eff} ,

den magnetischen Gesamtfluss Φ durch den Fleck.

Es steht also eine drei-parametrische Schar von Lösungen zu erwarten. Dabei sind aber nur die Größen T_{eff} und Φ physikalisch echte Scharparameter. Die Grösse z_0 hat nur Bedeutung hinsichtlich der Frage, wann die Lösungen unabhängig werden von der Tiefe des unteren Randes. Wie erwähnt sind nur dann die Vorstellung des stetigen Überganges in ein homogenes Magnetfeld am unteren Rand und die daraus folgenden unteren Randbedingungen berechtigt. Um einen Überblick über das diesbezügliche Verhalten der Lösungen zu bekommen, ist die Betrachtung einer Darstellung von Nutzen, in der charakteristische Eigenschaften der Lösungen gegen z_0 und in Abhängigkeit von den Parametern T_{eff} und Φ aufgetragen sind.

Es ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung, den Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld und der thermodynamischen Schichtung von Sonnenflecken zu klären. Dabei ist die mathematische Formulierung so gewählt, dass der thermodynamische Zustand des Flecks - gekennzeichnet durch seine eff. Temperatur - vorgegeben wird und das Magnetfeld aus der Rechnung folgt. Es erscheint daher naheliegend, zur Auswahl der die Lösungen charakterisierenden Eigenschaften das Magnetfeld und damit in engem Zusammenhang stehende Funktionen näher zu betrachten. In den Abbildungen 1 und 2 a/b ist der Verlauf von Druckdifferenz und Magnetfeld $y(z)$ bzw. mittlerem Fleckradius $\bar{r}(z)$ (Definition siehe (8)) aufgetragen, wie sie sich für verschiedene Gesamttiefe z_0 ergeben; eff. Flecktemperatur $T_{\text{eff}} = 4000^\circ$ und magnetischer Fluss $\Phi = 5 \cdot 10^{29}$ Gauss cm^2 sind so gewählt, dass sie als repräsentativ für den Beobachtungsquerschnitt gelten. Aus den Abbildungen entnimmt man, dass die Druckdifferenz mit wachsender Gesamttiefe z_0 gegen einen monoton von oben nach unten zunehmenden Verlauf strebt. Das Magnetfeld nimmt in allen Fällen von oben nach unten monoton zu, der mittlere Fleckradius von oben nach unten monoton ab. Es mag daher genügen, bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Lösungen von z_0 nur Werte dieser Funktionen am oberen und unteren Rand näher zu betrachten. Wegen des engen Zusammenhanges zwischen Druckdifferenz und Magnetfeld (Differentialgleichung (5)) genügt es zudem, nur das Verhalten des Magnetfeldes weiter zu verfolgen.

In Abbildung 3 a/b ist die dem Parameter T_{eff} entsprechende Schar und in Abb. 4 die dem Parameter Φ entsprechende Schar dargestellt. Die Werte des jeweils festgehaltenen Parameters sind wieder die der durchschnittlichen Beobachtungserfahrung.

Betrachtet man die Abbildungen, so stellt man bei beiden Scharen innerhalb einer Tiefe von 10.000 km eine deutliche Konvergenz fest. Bei den Werten am oberen Rand erfolgt sie rascher als bei den Werten am unteren Rand. Das mag damit zusammenhängen, dass die Druckdifferenz am unteren Rand grösser ist und kleine Schwankungen sich auf das Magnetfeld stärker auswirken als am oberen Rand. Jedenfalls geht aus diesem Verhalten hervor, dass das Magnetfeld im beobachtbaren Niveau nicht sehr empfindlich von den unteren Randbedingungen abhängt. Angesichts der erwähnten Unsicherheit beim Aufstellen unterer Randbedingungen und da bei allen Ergebnissen das Hauptaugenmerk auf den Grössen liegt, die man mit der Beobachtung vergleichen kann, ist dieses Verhalten sehr befriedigend.

Betrachtet man die Abbildungen im einzelnen, so stellt man fest, dass sich die zu verschiedenem magnetischen Fluss gehörenden Feldstärken nicht wesentlich voneinander unterscheiden, ganz im Gegenteil zu der der eff. Temperatur zugehörenden Schar. Der Grund hierfür liegt in dem ausserordentlich geringen Einfluss, den die in Betracht kommende Veränderung des magnetischen Flusses auf Gleichung (5) und damit auf die Berechnung des Magnetfeldes ausübt. Für die relative Schankung von y'' bedingt durch eine Schwankung des magnetischen Flusses folgt aus (5)

$$\frac{\Delta y''}{y''} = - \frac{\Delta \phi}{\phi}.$$

Da der magnetische Fluss über den gesamten beobachteten Bereich von Sonnenflecken um etwas mehr als den Faktor 10 variiert, folgt die relative Schwankung von y'' zu etwa 10^{-20} . Diese Eigenschaft ist sehr bemerkenswert, ergibt sich doch daraus, dass das Magnetfeld im wesentlichen durch den thermodynamischen Zustand des Flecks allein bestimmt ist.

Die Abhängigkeit der Lösungen vom Scharparameter ϕ wurde nur für grössere Werte untersucht. Für kleinere Werte des magnetischen Flusses traten numerische Schwierigkeiten auf, bedingt durch die Struktur von Gleichung (5): Wegen der Nicht-Linearität dieser Gleichung liegen singuläre und nicht-singuläre Lösungen ganz dicht nebeneinander. Um eine singularitätenfreie Lösung zu bekommen, müssen daher die Anfangswerte bei der numerischen Integration auf mehrere (physikalisch nicht mehr sinnvolle) Dezimalstellen genau angegeben werden. Für Werte $\phi \leq 5 \cdot 10^{21}$ Gauss $\cdot$ cm² ist dies ausserordentlich mühsam. Zudem ist diese Schwierigkeit rein mathematischer Natur; es besteht also kein physikalischer Grund dagegen, die Ergebnisse für dieses Gebiet nicht durch Extrapolation zu gewinnen.

Nun zur T_{eff} zugehörenden Lösungsschar und damit zur Diskussion der astrophysikalischen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung. Als Ausgangspunkt für diese sind in Tab. 1 die interessierenden Eigenschaften der Lösungen zusammengestellt. Die jeweiligen Werte für y sind Abb. 3 a/b für hinreichend grosse Werte von z_0 entnommen. Das Verhältnis $1/H$ - Mass für die Behinderung der Konvektion durch das Magnetfeld - und die Tiefe z_D des oberen Randes der Fleckschichtung, die sog.

geometrische Depression, ändern ihren Wert mit zunehmender Gesamttiefe fast nicht; sie wurden direkt den Rechenergebnissen entnommen. Der Energiestrom F folgt aus der eff. Flecktemperatur T_{eff} durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz. Der Gasdruck im beobachtbaren Niveau des Flecks ist nach E. Vitense (1951 b) ebenfalls durch die eff. Flecktemperatur bestimmt.

Tabelle 1

T_{eff}	$\log p$	z_D	F	$1/H$	$y(z_D)$	$y(\infty)$
3800°	5.17	$8.15 \cdot 10^7$	$1.170 \cdot 10^{10}$	0.185	62.0	98
4000°	5.15	$7.00 \cdot 10^7$	$1.425 \cdot 10^{10}$	0.226	53.5	93
4200°	5.12	$5.90 \cdot 10^7$	$1.750 \cdot 10^{10}$	0.277	55.5	87
4400°	5.08	$4.80 \cdot 10^7$	$2.100 \cdot 10^{10}$	0.345	51.5	82
5000°	4.98	$2.40 \cdot 10^7$	$3.500 \cdot 10^{10}$	0.556	42.6	68

Dieser Tabelle sei zunächst der Zusammenhang zwischen eff. Flecktemperatur und zentraler Magnetfeldstärke $B_c = y^2$ des Flecks entnommen. Dieser stellt eines der Hauptziele der Untersuchung dar und ist in Abb. 5 aufgezeichnet. Die Werte der magnetischen Feldstärken im beobachtbaren Niveau liegen in der Größenordnung einiger 1000 Gauss; niedrigen eff. Flecktemperaturen entsprechen hohe Magnetfeldstärken, zu höheren (näher der der Photosphäre gelegenen) eff. Temperaturen gehören niedrigere Magnetfeldstärken. Das ist physikalisch durchaus verständlich: Niedrige eff. Temperaturen kennzeichnen eine Schichtung, die sich von der der Umgebung stärker unterscheidet als eine zu höheren eff. Temperaturen gehörende. Bei niedrigeren eff. Temperaturen ergeben sich daher grössere horizontale Druckunterschiede und damit auch höhere magnetische Feldstärken als umgekehrt.

Der in Abb. 5 dargestellte Zusammenhang bietet die Möglichkeit eines Vergleichs mit Beobachtungen. Bei P. Stumpff (1961) findet sich ein Zusammenhang zwischen eff. Flecktemperatur und Umbrafläche, wie er aus neueren Messungen folgt. Benutzt man noch den empirischen Zusammenhang zwischen zentraler Magnetfeldstärke und Umbrafläche (bei J. Houtgast und A. van Sluifers, 1948, oder bei S.B. Nicholson, 1933) so lassen sich Beobachtungs- und Rechenergebnisse miteinander vergleichen. Die Messungen, in Abb. 5 eingetragen, liegen etwas unterhalb der theoretischen Kurve zeigen aber den gleichen Verlauf. Die Näherung der vorliegenden Theorie scheint also systematisch etwas zu hoch liegende Feldstärken zu liefern; der grössenordnungsmässige Vergleich bleibt aber durchaus positiv.

Weiter ist es möglich mit Hilfe der Ergebnisse in Tab. 1, die Frage nach der Behinderung der Konvektion durch ein Magnetfeld zu beleuchten. In Abb. 6 ist die Magnetfeldgrösse $y(z_D)$ am oberen Rand der Fleckschichtung gegen das Verhältnis von Mischungsweg l zu homogener Schichtdicke H aufgetragen. Aus dieser

Darstellung ist ersichtlich: Zu schwachen Magnetfeldern gehören Werte von $1/H$ näher an 1, dem Wert, der für $1/H$ in der ungestörten WKZ angenommen wurde; zu stärkeren Magnetfeldern gehören kleinere Werte des Verhältnisses $1/H$: Das heisst: Starke Magnetfelder reduzieren den durch Konvektion transportierten Anteil des Energiestromes stärker als schwächere Magnetfelder - durchaus konsistent mit der physikalischen Vorstellung. Interessant an dieser Darstellung sind die Grenzfälle $1/H=0$ und $1/H=1$. Die sich ergebenden Sonnenflecken-Modelle sind einerseits dadurch begrenzt, dass das Magnetfeld die Konvektion völlig unterdrückt. Durch diesen Grenzfall reinen Strahlungsenergie-transportes sind die maximal möglichen horizontalen Druckunterschiede und damit die maximal möglichen Magnetfeldstärken bestimmt. Stärkere Magnetfelder können keine Lösung der behandelten Differentialgleichungen sein, da sie sich nicht mehr im magneto-hydrostatischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung befinden würden. Extrapolation der dargestellten Kurve auf den Wert $1/H=0$ ergibt Feldstärken im beobachtbaren Niveau von etwa 5000 Gauss. Der andere Grenzfall gehört zu Magnetfeldern, die so schwach sind, dass sie die Konvektion überhaupt nicht mehr beeinflussen. Noch schwächere Magnetfelder können nicht existieren, da keine geringeren als die im Grenzfall $1/H=1$ auftretenden horizontalen Druckunterschiede möglich sind; auch sie befänden sich daher nicht im magneto-hydrostatischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung und können daher nicht Lösung der Differentialgleichungen sein. Extrapolation in Abb. 6 auf den Wert $1/H=1$ liefert eine beobachtbare Feldstärke von der Grössenordnung 500 Gauss. Beide Grenzfälle treten in den Beobachtungen auf. Liegt auch der gerechnete Maximalwert von 5000 Gauss für die Magnetfeldstärke um etwa 1000 Gauss über dem beobachteten, so dürfte doch allein die Tatsache, dass maximale und minimale Lösungen bei der Rechnung auftreten, ein Hinweis auf die Brauchbarkeit der gewählten Formulierung des Problems sein.

Der Grenzfall $1/H=0$ wirft einiges Licht auf die früher untersuchten Modelle, die auf der Annahme beruhten, das Magnetfeld unterdrücke die Konvektion vollständig. Wie erwähnt musste in den untersuchten Fällen seitliche Einstrahlung von Energie dafür sorgen, dass die horizontalen Druckdifferenzen innerhalb der (wegen singularitätenfreier Lösbarkeit von Gleichung (5)) erforderlichen Grenzen blieb, was zu kleine Fleckradien zur Folge hatte (W. Deiner, 1960). Der bei den jetzigen Modellen auftretende Grenzfall $1/H=0$ müsste - cum grano salis - auch Lösung dieses früheren Versuches sein. Da im vorliegenden Fall der Fleckradius keine Rolle spielt, scheint zu folgen, dass bei den früheren Modellen im Grenzfall niedriger eff. Flecktemperaturen, bzw. hoher Feldstärken die enge Koppelung zum Fleckradius wegfällt.

Endlich seien die Ergebnisse in Tab. 1 auch dazu benutzt, noch einmal die Frage zu diskutieren, wodurch der Energiestrom im Fleck gegenüber der Umgebung herabgesetzt sein könnte. Wie bereits ausgeführt, schlug F. Hoyle (1949) vor, die Konvektion folge den nach oben auseinanderlaufenden Feldlinien; dadurch

ürde die unten durch einen kleinen Querschnitt einströmende Energie oben über einen grösseren Querschnitt verteilt. Der Energiestrom nimmt daher von unten nach oben ab. Wie erwähnt wurde dieser Effekt bei den hier durchgeführten Rechnungen nicht berücksichtigt, da sich herausstellte, dass eine Reduktion des Verhältnisses $1/H$ weit wirksamer ist als dieser. Statt mit einem von der Tiefe z abhängigen Gesamtenergiestrom F zu rechnen, wurde die Fleckschichtung gleich unter der Annahme ermittelt, es fliesse überall der Energiestrom $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$, wo T_{eff} die eff. Flecktemperatur bedeutet. Die vorliegenden Ergebnisse gestatten nun nachträglich abzuschätzen, ob man mit dem Hoyle'schen Vorschlag tatsächlich imstande wäre, die Verminderung des Energiestromes zu erklären. Die Hoyle'sche Vorstellung einer Verdünnung des Energiestromes lässt sich formulieren

$$\pi \bar{r}^2 \cdot F = \text{const.}$$

Dabei ist über den jeweiligen Fleckquerschnitt gemittelt; zu kleinem mittleren Fleckradius $\bar{r}$ gehört ein grosser Wert des Energiestromes F und umgekehrt. Zusammen mit der in (o) gegebenen Definition des mittleren Fleckradius $\bar{r}$ folgt aus dieser Formulierung für das dem Verhältnis der Energieströme in verschiedenen Tiefen zugehörige entsprechende Verhältnis der Magnetfeldgrössen.

$$\frac{F_{\text{oben}}}{F_{\text{unten}}} = \left(\frac{y_{\text{oben}}}{y_{\text{unten}}} \right)^2.$$

Setzt man hierin die entsprechenden Werte für y aus Tab. 1 ein, so ergibt sich in allen Fällen das Verhältnis $F_{\text{oben}}/F_{\text{unten}}$ ungefähr zu 0.4. Das besagt, dass der Hoyle'sche Mechanismus allein im allgemeinen jedenfalls nicht imstande ist, den gesamten durch die höheren Schichten der Sonne fliessenden Energiestrom auf den Wert zu reduzieren, der aus dem Sonnenfleck oben abgestrahlt wird; ganz abgesehen davon, dass verschiedene Werte von F , die zu den diversen eff. Flecktemperaturen gehören, überhaupt nicht zum Ausdruck kommen. Man muss also zusätzlich einen Mechanismus annehmen, durch den Energie aus dem Fleck in die Umgebung transportiert wird. Wie dieser Mechanismus auch immer funktionieren mag, es wird vermutlich um so mehr Energie aus dem Fleckbereich abgelenkt, je stärker das dort herrschende Magnetfeld ist. Diese Vorstellung lässt sich nun an Hand der vorliegenden Ergebnisse nachprüfen. Bildet man die Differenz zwischen dem Wert F_0 des Energiestromes, der durch die höheren ungestörten Schichten der Sonne fliesst, und dem Wert F , der durch den hier betrachteten Fleckbereich transportiert wird, so stellt man in der Tat fest, dass diese Differenz mit wachsendem Magnetfeld grösser wird.

Damit sei die Diskussion der wesentlichen astrophysikalischen Ergebnisse der ausgeführten Rechnungen abgeschlossen. Was zum Schluss noch folgen soll, ist die Abschätzung von zwei Unsicherheiten, die in der vorliegenden Formulierung enthalten sind. Das ist einmal die Frage, wie stark der in die oberen Randbedingungen eingehende Druckwert die Ergebnisse beeinflusst. Es ist fraglich,

ob die hier erfolgte Benutzung der Ergebnisse von E. Vitense (1951b), um die zu eff. Flecktemperaturen gehörende Druckwerte zu erhalten, statthaft ist. Beobachtungen scheinen dem zu widersprechen; daher wurde ein Sonnenflecken-Modell mit den empirischen oberen Randwerten $T_{\text{eff}} = 4000^\circ$ und $\log p = 4.25$ berechnet*. Eine weitere erhebliche Unsicherheit steckt in der Beschreibung der turbulenten Konvektion und ihrer Behinderung durch ein Magnetfeld im Rahmen der Prandtl'schen Mischungswegtheorie.

Zur Abschätzung dieser ist es in der Astrophysik üblich, Schichtungen für $l/H = 1$ und für $l/H = 2$ zu berechnen; aus der Abweichung der Ergebnisse voneinander kann man entnehmen, wie empfindlich diese von l/H abhängen. Dieses Verfahren wurde auch im vorliegenden Fall angewendet; und zwar wurde die Schichtung der nicht von Magnetfeldern beeinflussten WKZ für beide Fälle gerechnet. Da die weiteren Rechnungen eng damit im Zusammenhang stehen, ist dadurch eine Änderung der gesamten Ergebnisse bedingt. Die Grösse der Änderung mag als Mass für die Empfindlichkeit dienen, mit der sich die besagte Unsicherheit auswirkt. Um gute Vergleichsmöglichkeiten zu haben, wurde ein solches Modell ebenfalls für $T_{\text{eff}} = 4000^\circ$ gerechnet.

Tabelle 2

$\log p$	$(l/H)_{\text{WKZ}}$	z_D	l/H	$y(z_D)$	$y(\infty)$
5.15	1	$7.00 \cdot 10^7$	0.226	58.5	93.0
4.25	1	$4.70 \cdot 10^7$	0.238	56.5	91.0
5.15	2	$3.70 \cdot 10^7$	0.404	53.5	97.5

Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt; zum Vergleich wurden die Ergebnisse für $T_{\text{eff}} = 4000^\circ$ aus Tab. 1 nochmals aufgeführt. Erstaunlicherweise wirkt sich die Änderung des Druckes am oberen Rand um fast eine Zehnerpotenz lediglich in der geometrischen Depression z_D aus. Und das in einem durchaus günstigen Sinne: Die Grösse der geometrischen Depression, unter Verwendung der Vitense'schen Ergebnisse für Modelle niedrigerer eff. Temperaturen doch auf beträchtliche Werte angewachsen, erniedrigt sich hier auf Werte von einigen 100 km, wie sie auch die Beobachtungen nahezu legen scheinen.

Auffällige Veränderungen bei Prüfung der anderen Unsicherheit sind ebenfalls wieder am Wert z_D der geometrischen Depression und am Wert l/H festzustellen, der sich für die Fleckschichtung ergibt. Für das erste gilt das schon im vorigen Absatz gesagte; der neue Wert für l/H legt nahe, im Ausdruck $(l/H)/(l/H)_{\text{WKZ}}$ ein Mass für die Behinderung der Konvektion durch das Magnetfeld zu erblicken, das invariant ist gegenüber der Schichtung der ungestörten WKZ.

*) Diese Werte verdanke ich Herrn Dr. H. Elsässer, Göttingen.

An der Grösse des Magnetfeldes ist keine erhebliche Änderung zu erkennen, wenngleich die Tendenz zu etwas niedrigeren Werten, die sich in beiden Fällen anzuzeigen scheint, im Hinblick auf die systematisch etwas zu hohen Werte in Tab. 1 nicht unbeachtet bleiben sollen.

5. Schlussbemerkungen.

Es war das Ziel der vorliegenden Arbeit, eine Erklärung zu geben für den Zusammenhang zwischen Sonnenflecken und deren Magnetfeld: Das Magnetfeld soll sich im magneto-hydrostatischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung befinden, wobei der dazu auch in horizontaler Richtung erforderliche Druckgradient durch die Behinderung der Konvektion durch das Magnetfeld zustande kommen soll. Die Behinderung der Konvektion wurde durch Verkleinerung des Verhältnisses von Prandtl'schen Mischungsweg l zu homogener Schichtdicke H berücksichtigt. Dieser Formalismus gestattet, theoretische Sonnenflecken-Modelle zu berechnen und somit die genannte Vorstellung quantitativ nachzuprüfen.

Man erhält im wesentlichen eine ein-parametrische Schar von Modellen (der Einfluss des magnetischen Flusses ϕ bleibt gering); Scharparameter ist das Verhältnis l/H . Einem bestimmten Wert dieses Verhältnisses entspricht einerseits ein Magnetfeld, das die Konvektion im angegebenen Mass behindert; andererseits bestimmt es eine Schichtung, eindeutig gekennzeichnet durch die eff. Temperatur. Die durchgeführten Rechnungen liefern Werte, die sich in grössenordnungsmässiger Übereinstimmung mit den Beobachtungen befinden. Da der Wert des Scharparameters im begrenzten Intervall $0 \leq l/H \leq (l/H)_{WKZ}$ liegen muss, sind auch die Sonnenflecken-Modelle nach oben und unten begrenzt - ebenfalls in Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Rechnungen wurden nur soweit ausgeführt, als es für die Feststellung der wesentlichen physikalischen Konsequenzen der vorliegenden Formulierung erforderlich war. Detaillierte Aussagen - mit dem vorliegend entwickelten Formalismus durchaus möglich - scheinen erst im Zusammenhang mit genaueren Beobachtungen sinnvoll. Eine Weiterentwicklung des hier behandelten Problems scheint in drei Richtungen nötig zu sein:

1. Im gleichen Masse, in dem Vorstellungen über das Zustandekommen der Sonnenflecken-Magnetfelder quantitative Form annehmen, werden sich bessere "untere Randbedingungen" ergeben.
2. Weitere Vorstellungen über einen Mechanismus, durch den Energie aus dem Fleckbereich heraustransportiert wird, müssen entwickelt und in den angegebenen Formalismus eingebaut werden. Es steht zu vermuten, dass sich dann die systematisch etwas zu hoch liegenden magnetischen Feldstärken erniedrigen werden.

3. Das Problem der Behinderung der Konvektion durch ein Magnetfeld hat hier eine phänomenologische Bearbeitung erfahren. Wurden damit auch positive Ergebnisse erzielt, so ist dieser Zustand doch nicht ganz befriedigend. Im Zuge der Bemühungen um eine deduktive hydrodynamische Turbulenztheorie dürfte sich auch der Rahmen für eine magneto-hydrodynamische Turbulenztheorie und damit auch eine physikalische Erklärung für die Verkleinerung des Verhältnisses $1/H$ ergeben.

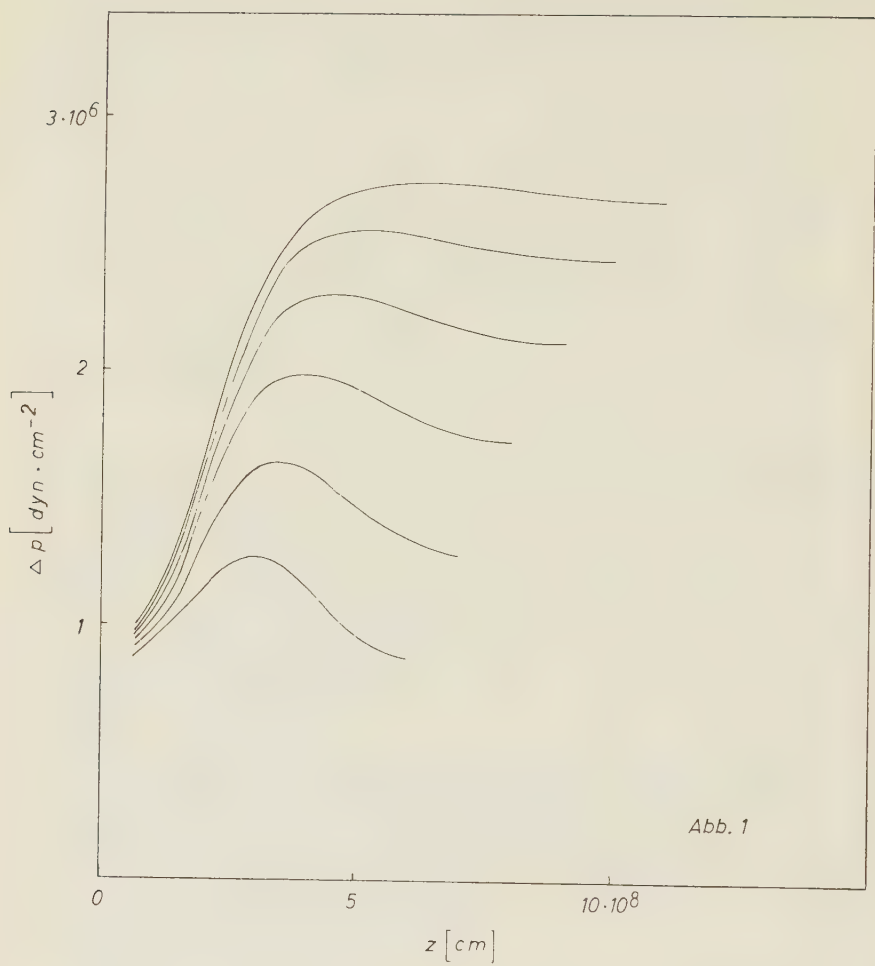
Ich danke sehr herzlich Herrn Prof. Dr. A. Schlüter für die Anregung zu dieser Arbeit und Herrn Prof. Dr. L. Biermann dafür, dass ich sie als Stipendiat am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik durchführen und dabei die elektron. Rechenmaschinen G 2 und G 3 benutzen konnte. Beiden Herren und allen Mitgliedern der Abteilung Astrophysik bin ich für Anregungen, Diskussionen und sonstige Hilfe sehr dankbar.

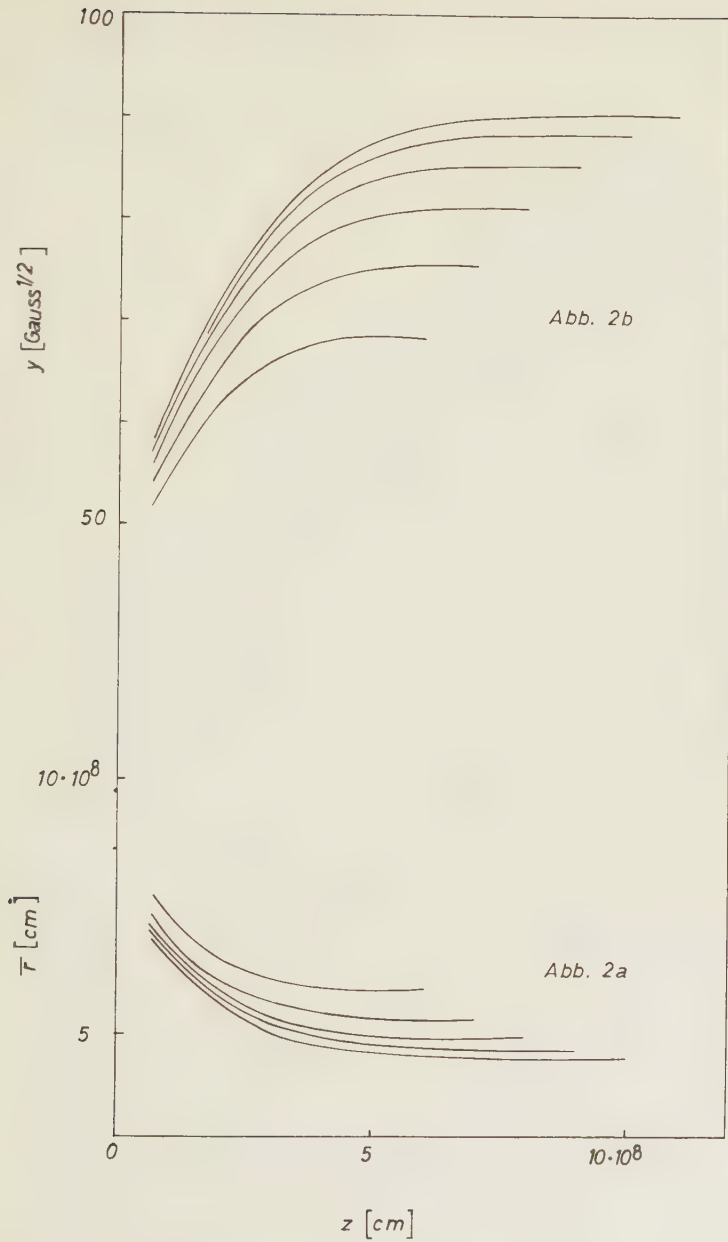
Literatur.

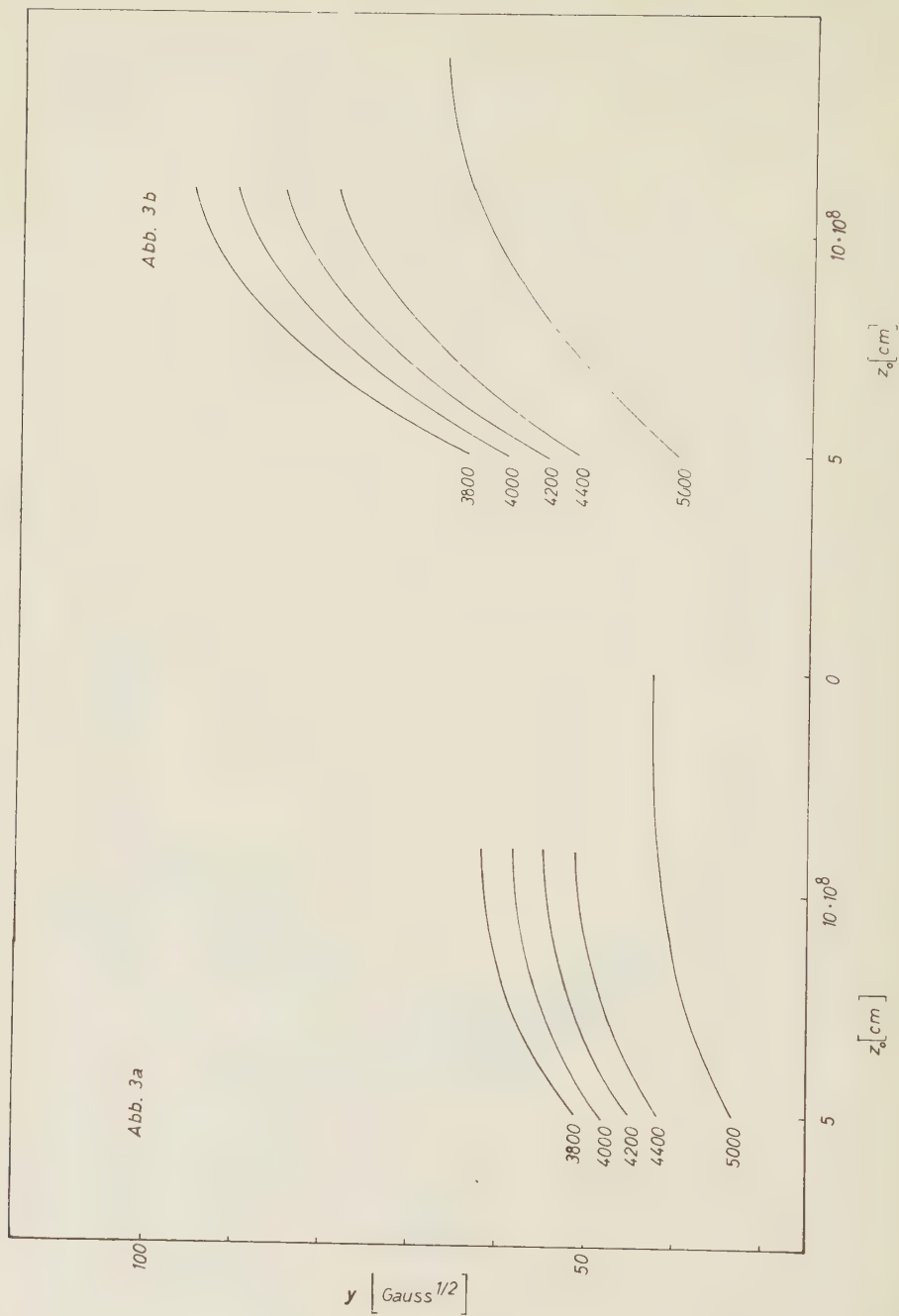
- Baker, N. und R. Kippenhahn, Z. Astrophysik 54, 114 (1962).
- Biermann, L., Vierteljahresschrift d. Astr. Ges. 76, 194 (1941).
- Böhm-Vitense, E., Z. Astrophysik 46, 108 (1958).
- Cowling, T.G., Monthly Notices 106, 218 (1946).
- Deinzer, W., Mitt. Astron. Gesellschaft 1960 - Anhang S. 7.
- Hale, G.E. und S.B. Nicholson, Astrophysic. Journal 62, 270 (1925).
- Houtgast, J. und A. van Sluiter,
Bull. Astronom. Inst. Netherl. 10, 325 (1948).
- Hoyle, F., Some Recent Researches in Solar Physics,
Cambridge University Press, 1949.
- de Jager, C., Handbuch der Physik Bd. 52, 80
Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1959.
- Kippenhahn, R., St. Temesváry und L. Biermann, Z. Astrophysik 46, 257 (1958).
- Kippenhahn, R., persönliche Mitteilung (1960).
- Nicholson, S.B., Publ. Astronom. Soc. Pacific 45, 51 (1933).
- Schlüter A. und St. Temesváry, Electromagnetic Phenomena in Cosmical
Physics (I.A.U. Symposium Nr. 6) S. 263.
Cambridge University Press 1958.
- Stumpff, P., Z. Astrophysik 51, 73 (1961).
- Temesváry, St., Modèles d'Etoiles et Evolution Stellaire S. 403 -
Mem. Soc. R. Sc. Liège, cinquième série, tome III (1959).
- Unsöld, A., Physik der Sternatmosphären, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955
- Vitense, E., Z. Astrophysik 28, 81 (1951a).
Z. Astrophysik 29, 73 (1951b).
Z. Astrophysik 32, 135 (1953).

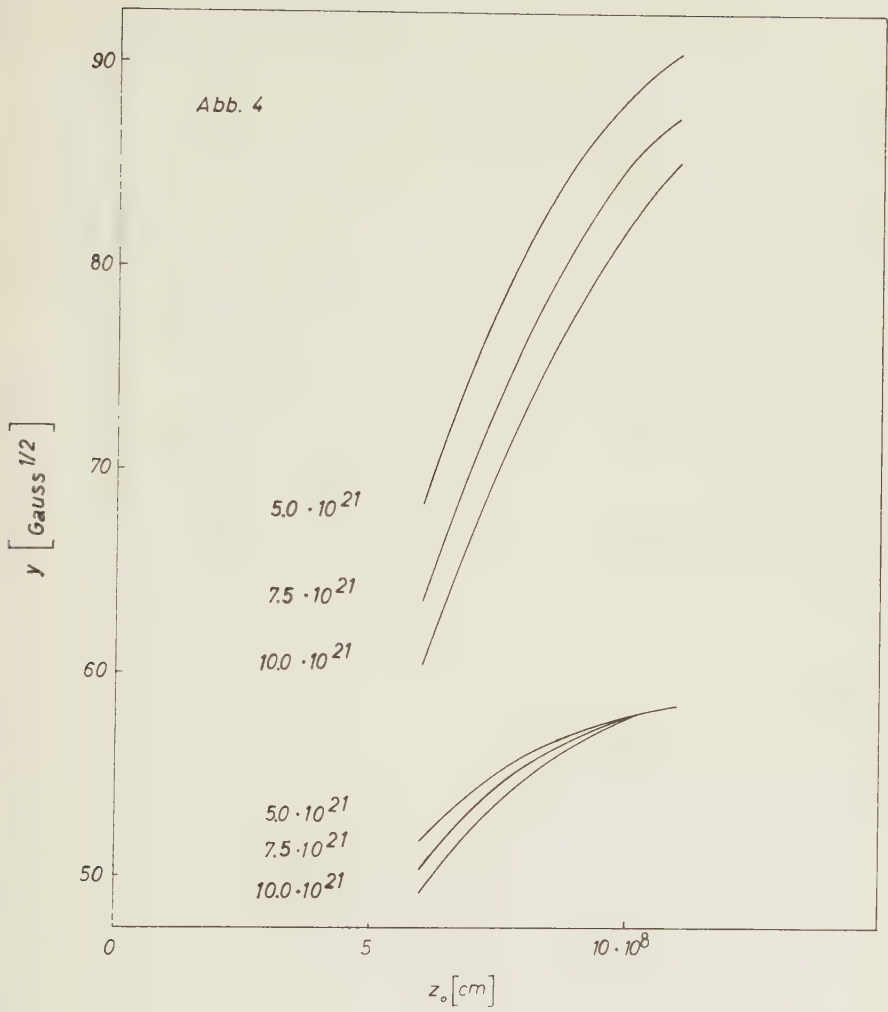
Abbildungen.

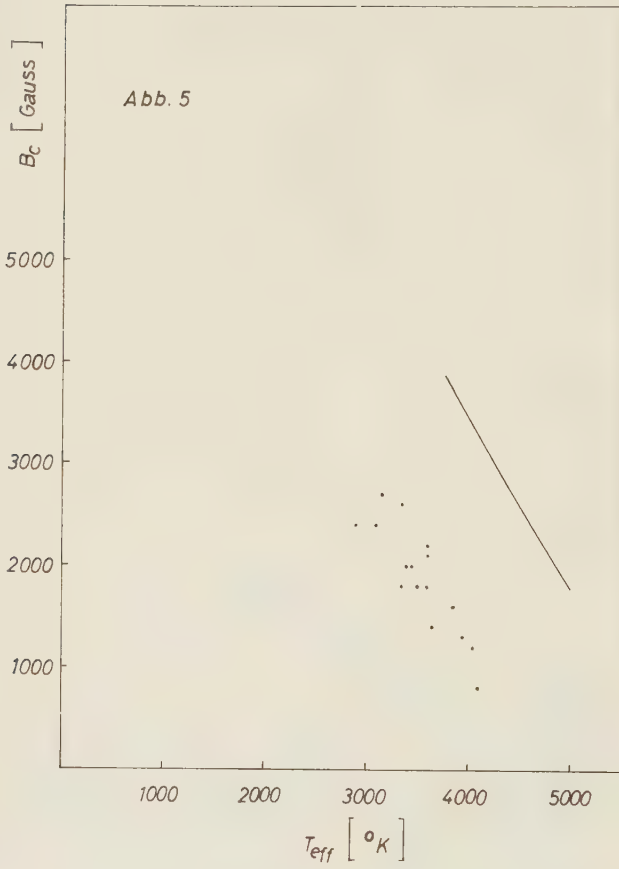
- Abb. 1 Verlauf der horizontalen Druckdifferenz Δp mit der Tiefe z für $T_{\text{eff}} = 4000^\circ$ und $\phi = 5 \cdot 10^{21}$ Gauss cm^2 ; die Kurvenschar gehört zu verschiedener Tiefe z_0 des unteren Randes (am rechten Ende der Kurven erkennbar). Der Beginn der Kurven bei $z \approx 0.7 \cdot 10^8$ cm entspricht der geometrischen Depression z_D des Flecks.
- Abb. 2 Verlauf von Magnetfeldgrösse y , bzw. mittlerem Fleckradius $\bar{r}$ mit der Tiefe z für $T_{\text{eff}} = 4000^\circ$ und $\phi = 5 \cdot 10^{21}$ Gauss cm^2 ; die Kurvenschar gehört zu verschiedener Tiefe z_0 des unteren Randes (am rechten Ende der Kurven erkennbar). Der Beginn der Kurven bei $z \approx 0.7 \cdot 10^8$ cm entspricht der geometrischen Depression z_D des Flecks. In Teil b wurde der Übersichtlichkeit halber die letzte Kurve nicht eingezeichnet.
- Abb. 3 Magnetfeldgrösse am oberen, bzw. unteren Rand in Abhängigkeit von der Tiefe z_0 des unteren Randes für $\phi = 5 \cdot 10^{21}$ Gauss cm^2 ; die Kurvenschar gehört zu verschiedenen eff. Flecktemperaturen.
- Abb. 4 Magnetfeldgrösse am oberen, bzw. unteren Rand in Abhängigkeit von der Tiefe z_0 des unteren Randes für $T_{\text{eff}} = 4000^\circ$; die Kurvenschar gehört zu verschiedenem magnetischen Gesamtfluss ϕ . Der Übersichtlichkeit halber wurde der Maßstab auf der Ordinate gegenüber Abb. 3 verdoppelt.
- Abb. 5 Beziehung zwischen zentraler Magnetfeldstärke B_0 im beobachtbaren Niveau und eff. Flecktemperatur T_{eff} . Die zum Vergleich eingezeichneten Beobachtungen sind P. Stumpff (1961), Abb. 17 entnommen und mit Hilfe einer Beziehung von J. Houtgast und A. van Sluifers (1948) auf zentrale Magnetfeldstärken bezogen.
- Abb. 6 Beziehung zwischen zentraler Magnetfeldstärke B_0 und Verhältnis von Mischungsweg l zu homogener Schichtdicke H zur Demonstration der Behinderung der Konvektion durch das Magnetfeld. Gestrichelte Teile der Kurve sind extrapoliert.

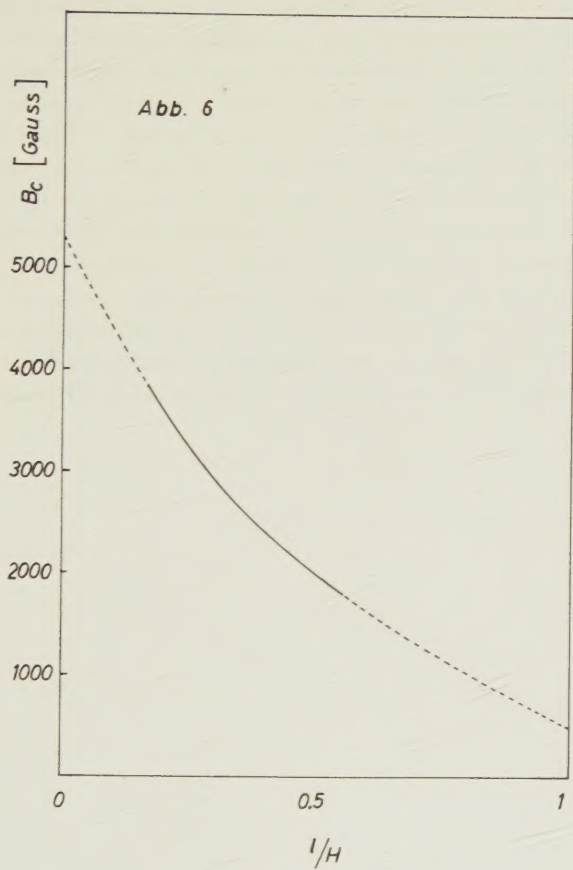












Lebenslauf.

Ich wurde am 31. Januar 1935 als Sohn des städtischen Verwaltungsbeamten Ludwig Deinzer und seiner Ehefrau Berta, geb. Seiler, in Nürnberg geboren. Von September 1941 an besuchte ich die Volksschule, zunächst in Nürnberg, später wegen des Krieges in Sommersdorf bei Ansbach (Mittelfranken). Wieder nach Nürnberg zurückgekehrt, trat ich im Januar 1946 in die damalige Oberrealschule an der Wölkernstrasse ein, an der ich im Juni 1953 die Reifeprüfung ablegte. Im Wintersemester 1953/54 begann ich das Studium von Physik und Mathematik an der Universität Erlangen, wo ich mich im Februar 1956 der Diplomvorprüfung und im November 1958 der Diplomhauptprüfung für Physik unterzog. Meine Diplomarbeit mit dem Thema "Analyse der Lichtkurve des Bedeckungsveränderlichen BV 143" habe ich unter der Obhut von Prof. E. Mollwo an der Remis-Sternwarte in Bamberg angefertigt. Im Januar 1959 trat ich als Stipendiat in die astrophysikalische Arbeitsgruppe des Max-Planck-Institutes für Physik und Astrophysik ein, um mich der vorliegenden Sonnenflecken-Untersuchung zu widmen.

